



PILAME 杯 2025

予選解答

日時：2025年6月22日(日) 14:00～17:00

問題別のリンク（参照したい問題番号が解答へのリンクになっています）

[問 1～10](#) [問 11～20](#)

[問 21](#) [問 22](#) [問 23](#) [問 24](#)

PILAME杯2025予選 解答用紙(問1～10) A 4印刷

丁寧に、濃く、はっきりと、枠内に書いてください。

確実に時間内に提出できるよう、余裕をもって撮影を行ってください。

四隅の黒い長方形がすべて見えるように撮影してください。

チームID

問 1

341

問 2

$\frac{7}{2}$

問 3

1050, 1080, 2025, 4050, 6075

問 4

$3\sqrt{29}$

問 5

$3 \times 10^9 - 342 \times 3^{10}$

問 6

$3 + \sqrt{15}$

問 7

3072

問 8

$\sqrt{20 + 6\sqrt{2}}$

問 9

1035

問10

$\frac{4850}{3}$

PILAME杯2025予選 解答用紙(問11～20) A 4 印刷

丁寧に、濃く、はっきりと、枠内に書いてください。

確実に時間内に提出できるよう、余裕をもって撮影を行ってください。

四隅の黒い長方形がすべて見えるように撮影してください。

チームID

問11

$$\frac{12\sqrt{7}}{7}$$

問12

46656

問13

11

問14

$$\frac{13974}{7}$$

問15

2333

問16

45870

問17

$$\frac{\sqrt{426} - 6\sqrt{6}}{12}$$

問18

37

問19

$$3^3 \times 7^2 \times 3447740$$

問20

1460823

問 21 配点：19

以下の条件をみたすような素数の組 (p, q, r) をすべて求めよ.

素数 s であって, $\frac{p^s + q^s + r^s}{pqr}$ が整数になるようなものが無数に存在する.

ただし, 素数が無数に存在するという事実は証明せずに用いてよい.

解答

以下, 合同式は $\text{mod } p$ で考える. p と互いに素な整数 m に対し, $mn \equiv 1$ なる整数 n は p を法として一意に定まるので, この n を m^{-1} と表すことにする.

p, q, r が相異なる場合

素数 $s > \max\{p, q, r\}$ であって, $\frac{p^s + q^s + r^s}{pqr}$ が整数になるものを任意にとる. このとき $q^s + r^s \equiv 0$ で, p と r は互いに素であるから $(qr^{-1})^s \equiv -1$ となり, s が奇数であることとあわせると $(q(-r)^{-1})^s \equiv 1$ が得られる. $(q(-r)^{-1})^d \equiv 1$ なる最小の正の整数を d とし, s を d で割った商と余りをそれぞれ Q, R とすると,

$$1 \equiv (q(-r)^{-1})^s \equiv (q(-r)^{-1})^{dQ} \cdot (q(-r)^{-1})^R \equiv (q(-r)^{-1})^R$$

となり, d の最小性を踏まえれば $R = 0$ すなわち $d \mid s$ を得る. また, Fermat の小定理より $(q(-r)^{-1})^{p-1} \equiv 1$ なので, 同様に考えて $d \mid p-1 < s$ となり, $d \mid \gcd(s, p-1) = 1$, すなわち $d = 1$ を得る. つまり $q(-r)^{-1} \equiv 1$ であり, $q+r \equiv 0$, すなわち $p \mid p+q+r$ を得る. 同様に $q, r \mid p+q+r$ も成り立ち, p, q, r が相異なることから $pqr \mid p+q+r$ を得る. 一般性を失わずに $p < q < r$ と仮定すると,

$$pqr \mid p+q+r \implies pqr \leq p+q+r < 3r \implies pq < 3$$

となるが, $pq < 3$ なる素数 p, q は存在しないため不適.

p, q, r のうち等しいものが存在する場合

$p = q$ の場合, $p \mid p^s + q^s + r^s$ より $p \mid r$, すなわち $p = q = r$ である必要がある. $q = r$, $r = p$ の場合も同様である. 逆にこのとき, 任意の素数 $s \geq 3$ に対し $\frac{p^s + q^s + r^s}{pqr} = 3p^{s-3}$ は整数になるので, 条件をみたす.

以上より, 条件をみたすのは素数 p を用いて (p, p, p) と表されるものすべてである.

問 22 配点：23

文字列 ABC を連続して 100 個繋げて得られる文字列、すなわち $\overbrace{\text{ABCABC}\cdots\text{ABC}}^{\text{ABC が 100 個}}$ から始めて、文字列に対して以下の操作を何回か繰り返し行う。

A, B, C が 1 つずつ含まれるような連続する 3 文字を選び、その 3 文字を、その真ん中の文字で置き換える。例えば、文字列 ABCABC の前から 2, 3, 4 文字目を選んで操作を行うと、BCA が C に置き換えられ、文字列は ACBC となる。

このとき、最終的に長さ 2 の文字列 S となった。 S としてありうるものをすべて求めよ。

解答

答えは AA, BB, CC である。まず、これ以外は S になりえないことを示す。

証明. 元の文字列の A, B, C をそれぞれ 0, 1, 2 に置き換えた文字列を T とすると、元の文字列に対して問題の操作を行うことは、文字列 T に対して次の操作を行うことに対応する。

T の連続する 3 文字で、前から順に a, b, c として $b - a \equiv c - b \not\equiv 0 \pmod{3}$ をみたすものを選ぶ。そして、選んだ 3 文字を b に置き換えて新たな文字列とする。

よって

$$s = (\text{前から奇数番目にある数字の総和}) - (\text{前から偶数番目にある数字の総和})$$

とすると、 s は操作前 b が前から奇数番目にあった場合 $a + c - 2b$ だけ、操作前 b が前から偶数番目にあった場合 $2b - a - c$ だけ変化する。いずれにせよ、この変化量は 3 の倍数なので、操作を行っても s は mod 3 で不変である。1 回目の操作前、 s は 3 の倍数であるため、文字列 S に対する s も 3 の倍数となる。したがって、AA, BB, CC 以外は S になりえない。□

次に、AA, BB, CC がいずれも S となりうることを示す。

証明. まず、以下のような操作を考えることで、与えられた文字列を長さ 6 の文字列 ABCABC にできることがわかる。

$$\overbrace{\text{ABCABCABC}\cdots\text{ABC}}^{\text{ABC が 100 個}} \rightarrow \text{ACBAC}\cdots\text{ABC} \rightarrow \overbrace{\text{ABC}\cdots\text{ABC}}^{\text{ABC が 98 個}} \rightarrow \cdots \rightarrow \text{ABCABC}$$

さらに、以下のような操作を考えることで、AA, BB, CC がいずれも S になりうることがわかる。

$$\text{ABCABC} \rightarrow \text{ABAC} \rightarrow \text{AA}$$

$$\text{ABCABC} \rightarrow \text{BABC} \rightarrow \text{BB}$$

$$\text{ABCABC} \rightarrow \text{ACBC} \rightarrow \text{CC}$$

□

以上より、答えは AA, BB, CC の 3 つであることが示された。

問 23 配点：23

$AB < AC$ なる三角形 ABC があり、点 B を通り点 C で直線 AC に接する円を ω 、その中心を O とする。直線 AB と ω の交点のうち B でない方を D 、 $\angle BAC$ の二等分線と線分 CD の交点を P 、三角形 BDP の外接円 Γ_1 と直線 AP の交点のうち P でない方を Q 、三角形 COQ の外接円 Γ_2 と ω の交点のうち C でない方を X とする。線分 DX と Γ_1, Γ_2 の交点のうちそれぞれ D, X でない方を Y, Z とする。このとき、点 O は三角形 QYZ の外心であることを示せ。

解答

$\alpha = \angle BAP = \angle CAP$, $\beta = \angle ACB$ とする。接弦定理より $\angle CDB = \angle ACB$ であり、4 点 B, D, P, Q が Γ_1 上にあることより $\angle AQB = \angle CDB$ なので、

$$\angle AQB = \angle CDB = \angle ACB = \beta$$

が成り立つ。よって点 Q は、三角形 ABC の外接円の点 A を含まない弧 BC の中点である。これにより、 OQ は線分 BC の垂直二等分線とわかるため、

$$\angle OQC = 90^\circ + \angle CBQ = 90^\circ + \angle CAQ = 90^\circ + \alpha$$

が成り立つ。さらに、点 O は ω の中心なので、 $OC = OX$ より

$$\angle COX = 180^\circ - 2\angle OXC = 180^\circ - 2(180^\circ - \angle OQC) = 2\alpha$$

が成り立ち、円周角の定理より $\angle CQX = \angle COX = 2\alpha = \angle BAC$ となるので、3 点 B, Q, X は同一直線上にあることがわかる。したがって

$$\angle XBD = \angle BAP + \angle AQB = \alpha + \angle ACB = \alpha + \beta = 90^\circ - \frac{\angle BCD}{2} = 90^\circ - \frac{\angle BXD}{2}$$

が成り立ち、点 X は ω の点 C を含む弧 BD の中点である。よって、四角形 $BQYD$ は $BQ = YD$ なる等脚台形となり、 $OQ = OY$ が成り立つ。また

$$\angle QCX = \angle BCX - \angle BCQ = 180^\circ - \angle BDY - \angle BAQ = 180^\circ - 2\alpha - \beta = \angle ABC = \angle AQC$$

となるので、直線 CX と $\angle BAC$ の二等分線 ℓ は平行である。さらに

$$\angle QZX = 180^\circ - \angle QCX = 180^\circ - (\angle BCX - \angle BCQ) = 2\alpha + \beta = \angle DAQ + \angle XDA$$

が成立するので、点 Z も ℓ 上にあり、 $OQ = OZ$ が成り立つ。

以上より、点 O は三角形 QYZ の外心である。

問 24 配点：25

正の実数に対して定義され正の実数値をとる関数 f であって、任意の正の実数 x, y に対して

$$f((y+1)f(x)) = f(x) + xf(y)$$

が成り立つものをすべて求めよ.

解答

任意の $x, y > 0$ に対して、 $f((y+1)f(x)) > f(x)$ より、特に $f((y+1)f(x)) \neq f(x)$ であるから、 $(y+1)f(x) \neq x$ が成り立つ. ある $x > 0$ が存在して $x - f(x) > 0$ と仮定すると、この x に対し $y = \frac{x - f(x)}{f(x)} > 0$ とすることで $(y+1)f(x) = x$ が成り立ち、矛盾する.

よって任意の $x > 0$ に対して、 $x - f(x) \leq 0$ 、すなわち $f(x) \geq x$ であるほかない. したがって任意の $x, y > 0$ に対して、

$$f(x) + xf(y) = f(yf(x) + f(x)) \geq yf(x) + f(x), \quad \therefore \frac{f(y)}{y} \geq \frac{f(x)}{x}$$

が成り立ち、 x と y を入れ替えて $\frac{f(x)}{x} \geq \frac{f(y)}{y}$ も成り立つから、 $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(y)}{y}$ を得る.

上で $y = 1$ とすることで、定数 $c = f(1) > 0$ を用いて $f(x) = cx$ と表せることが分かる. 与式に代入すると、 $c = 1$ 、すなわち $f(x) = x$ のみ条件をみたすことが分かる.