



PILAME 杯 2025

予選問題

2025年6月22日(日) 14:00～17:00

注意事項

1. コンテストで利用できるものは、筆記用具・定規・コンパス・大会用サイトのための情報端末・事前に印刷した解答用紙・計算用紙のみです。分度器や電卓は使用できません。また、情報端末を問題の閲覧・解答の提出以外の目的で使用してはいけません。ただし、特段の事情により個別に使用が認められたものに関しては、この限りではありません。
2. 問題は全部で 24 問あり、問 1～20 は結果のみを解答する問題（計 210 点）、問 21～24 は記述問題（計 90 点）です。問 1～20、問 21～24 はそれぞれおおよその難易度順（問題番号が大きいほど難しい）に並んでいます。問 20 までと問 21 以降の難易度を比較することは一切想定しておりませんので注意してください。
3. 各問題の配点は以下の通りです。

問 1	問 2	問 3	問 4	問 5	問 6	問 7	問 8
5	5	7	7	7	7	7	8
問 9	問 10	問 11	問 12	問 13	問 14	問 15	問 16
9	10	10	11	12	14	14	15
問 17	問 18	問 19	問 20	問 21	問 22	問 23	問 24
15	15	15	17	19	23	23	25

4. コンテスト中はチームの選手間でのみ会話を行うことができます。
5. 解答は指定の Google フォームから提出してください。

Sponsored by



結果のみを解答する問題

問1 配点：5

文字列 PL から始めて、文字列に対して以下の操作を繰り返し行う。

すべての隣り合う 2 文字の間について、P, L, M のうち両隣にないものを入れる。

例えば、1 回目の操作が終わった後の文字列は PML であり、2 回目の操作が終わった後の文字列は PLMPL である。10 回目の操作が終わった後の文字列に、文字列 PLM はいくつ含まれるか。すなわち、P, L, M がこの順に（前から）連続して現れる箇所はいくつあるか。

問2 配点：5

1 以上の実数 a であって、 $\{a\}^2 = \{a^2\}$ をみたすもののうち、10 番目に小さい値を求めよ。

ただし、実数 x に対して、 $\{x\}$ は x の小数部分、すなわち x を超えない最大の整数を x から引いた値を表す。

問3 配点：7

4 桁の正の整数 N であって、以下の条件をすべてみたすものを**今年の数**と呼ぶことにする。

- 百の位は 0 である。
- 100 の倍数ではない。
- N から百の位の 0 を取り除いてできる 3 桁の整数は N を割り切る。

例えば、2025 は今年の数である。実際、百の位は 0 であり、100 の倍数ではなく、かつ百の位の 0 を取り除いてできる 3 桁の整数 225 は 2025 を割り切る。このとき、今年の数（2025 を含めて）すべて求めよ。

問4 配点：7

$\angle A = 90^\circ$ なる直角二等辺三角形 ABC の（端点を除く）辺 AB, AC 上にそれぞれ点 D, E があり、 $BC \parallel DE$ をみたしている。三角形 BCD の重心を G 、直線 EG と直線 BC の交点を P とすると、 $DE = 12$, $EG = 10$ が成立した。このとき、線分 AP の長さを求めよ。

問5 配点：7

各桁の和も各桁の積も 3 で割り切れるような 10 桁の正の整数はいくつあるか。

問6 配点：7

$AB < AC$ なる鋭角三角形 ABC があり、その外接円を Γ とする。点 A における Γ の接線と直線 BC の交点を D とし、 $\angle ADC$ の二等分線と線分 AB, AC の交点をそれぞれ E, F とすると、 $BE = 3, CF = 5$ が成立した。このとき、線分 AB の長さを求めよ。

問7 配点：7

ある文字列 S を**圧縮する**とは、 S 内に同じ文字が 1 文字以上連続して現れる各箇所を、その文字 1 つと連続回数（を十進法で表記したもの）で置き換えることをいい、文字列 S を圧縮してできる文字列を $f(S)$ で表す¹。例えば、 $f(\text{abbcaaa}) = \text{a1b2c1a3}$ である。

いま、 a, b, c からなる（使わないものがあってもよい）文字列 S が以下の条件をみたしている。

S と $f(S)$ の長さは等しく、かつ奇数である。

文字列 S の長さとしてありうる最小の値を N とするとき、長さ N の文字列 S としてありうるものはいくつあるか。

問8 配点：8

実数 x, y が $x^2 + y^2 = 1$ をみたすとき、 $\sqrt{1-x} + 3\sqrt{1-y}$ のとりうる最大の値を求めよ。

問9 配点：9

1 以上 2025 以下の整数 n であって、以下の条件をみたす正の整数 a, b が存在するようなものはいくつあるか。

a を b で割った商と余りは、 nb を a で割った商と余りにそれぞれ等しい。

問10 配点：10

平面上に凸 100 角形 $A_1A_2 \cdots A_{100}$ があり、どの相異なる 3 本の対角線を選んでも、それらは 1 点で交わらないとする。1, 2, ..., 100 の並び替え $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ をとり、

$$A_{a_1} \longrightarrow A_{a_2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_{a_{100}} \longrightarrow A_{a_1}$$

という順番で一周して戻ってくるように頂点を線分で結んだ後、凸 100 角形 $A_1A_2 \cdots A_{100}$ の（周上を除く）内部における線分の交点を数える。考えられる線分の引き方は、線分を結ぶ順番を含めて $100!$ 通りあるが、それらすべてにおける内部の交点の個数の平均値を求めよ。

ただし、1, 2, ..., 100 の並び替えとは、1 以上 100 以下の整数がちょうど 1 回ずつ現れる長さ 100 の数列である。

¹厳密な定義は以下の通りである。

空でない文字列 S に対し、その長さを ℓ とし、各 $n = 1, 2, \dots, \ell$ に対し、 n 番目の文字を s_n とする。便宜的に $s_0, s_{\ell+1}$ を文字列 S に含まれない文字で定め、 $s_{n+1} \neq s_n$ なる $n = 0, 1, \dots, \ell$ を昇順に並べた数列を $(0 =) n_0, n_1, \dots, n_m (= \ell)$ とする。このとき、文字列 $f(S)$ とは、文字 $s_{n_1}, n_1 - n_0$ の十進数表記、文字 $s_{n_2}, n_2 - n_1$ の十進数表記、..., 文字 $s_{n_m}, n_m - n_{m-1}$ の十進数表記を、この順に並べた文字列のことである。

問 11 配点：10

$AB = 4$, $AC = 5$ なる三角形 ABC の（周上を除く）内部に点 P があり、

$$\angle PBC = \angle PCA = \angle PAB$$

をみたしている．直線 AP と辺 BC の交点を D とすると、 $BD : DC = 7 : 9$ が成立した．このとき、線分 BC の長さを求めよ．

問 12 配点：11

$1, 2, \dots, 10$ の並び替え $p_1, p_2, \dots, p_{10}$ について、そのスコアを

$$|1 - p_1| + |2 - p_2| + \dots + |10 - p_{10}|$$

で定める．スコアのとりうる値のうち **2 番目** に大きい値を M とするとき、スコアが M となるような並び替え $p_1, p_2, \dots, p_{10}$ はいくつあるか．

ただし、 $1, 2, \dots, 10$ の並び替えとは、 1 以上 10 以下の整数がちょうど 1 回ずつ現れる長さ 10 の数列である．

問 13 配点：12

$AB = 10$, $BC = 7$ なる三角形 ABC があり、その外心を O とする． $\angle BAC$ の二等分線と辺 BC の交点を D とし、線分 AD の垂直二等分線と線分 AO の交点を E とすると、 $AE : EO = 8 : 1$ が成立した．このとき、線分 AC の長さを求めよ．

問 14 配点：14

1 以上 900 以下の整数 k に対して、 $\frac{k}{9009}$ を十進法で表したときの小数第 i 位の値を $f(k, i)$ と定める．このとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(k, i) \left(\frac{1}{2}\right)^i$$

はすべての k について収束するので、その極限値を 1 以上 900 以下の整数 k について足し合わせた値を求めよ．

ただし、必要であれば $\frac{1}{9009} = 0.\dot{0}0011\dot{1}$ であることを用いてよい．また、実数 x を十進法で表したときの小数第 i 位とは、この問題では、 $|10^i x|$ を超えない最大の整数を 10 で割った余りとして定義される．

問 15 配点：14

整数からなる数列 $a_0, a_1, a_2, \dots$ を

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 3, \quad a_{n+2} = 100(a_{n+1} + a_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

で定める．非負整数 N であって a_{2N} が 100^{N+2} の倍数となるようなもののうち，最小のものを求めよ．

問 16 配点：15

図 A の 222^2 個のマスのからなる図形について，その各マスを白または黒のいずれか 1 色で塗ることを考える．このとき，以下の 3 条件をすべてみたすような塗り方は何通りあるか．

- 最上段の 1 マスは黒で塗られている．
- 最下段の 443 マスには黒で塗られたマスがちょうど 2 マス存在する．
- 図 B に示す図形と合同で向きも一致するような任意の 4 マスの組について，次のいずれかが成立する．
 - 4 マスとも同じ色で塗られている．
 - 黒と白で塗られたマスがそれぞれちょうど 2 マスずつ存在する．

ただし，裏返しによって一致する塗り方は異なるものとして数え，色を塗る順番のみが異なるような塗り方は同じものとして数える．

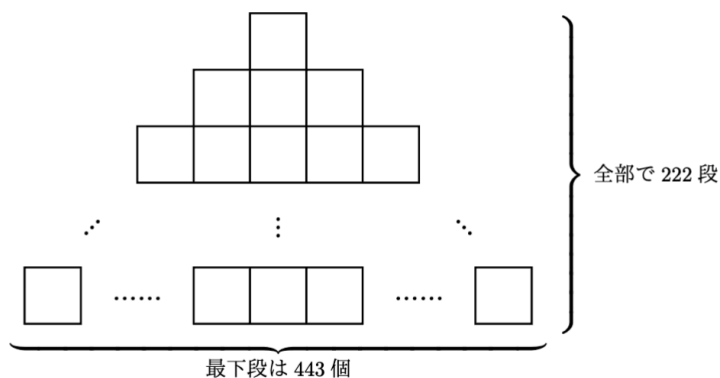


図 A

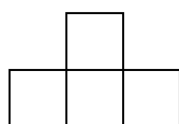


図 B

問 17 配点：15

三角形 ABC があり，その外接円を Ω ，内接円を ω とする． ω の中心を I とし， Ω の弧 BC のうち点 A を含む方の中点を M ，含まない方の中点を N とすると，直線 MN は ω に接した．さらに，直線 IM と Ω との交点のうち M でない方を P とし， Ω の点 A, P における接線の交点を X とすると， $MX = 2$ ， $NX = \sqrt{5}$ が成立した．このとき， ω の半径の長さを求めよ．

問 18 配点：15

$AB < AC$ なる鋭角三角形 ABC があり，その重心を G とする．三角形 ABC の外接円の点 A を含まない方の弧 BC 上に， $AB \times CD = AC \times BD$ をみたすように点 D をとり，線分 AD の中点を M ，点 C から直線 AD に下ろした垂線の足を H とする． $\angle DGM = \angle BAC$ ， $MG = 4$ ， $DH = 11$ が成り立つとき，線分 AH の長さを求めよ．

問 19 配点：15

素数 P を $P = 2 \times 3^3 \times 7^2 + 1$ で定める． $a > b$ をみたすような 1 以上 $P - 1$ 以下の整数の組 (a, b) すべてについて以下の値を足し合わせた値を求めよ．

$a^n - b^n$ が P の倍数となるような正の整数 n のうち最小のもの．

問 20 配点：17

1 以上 3 以下の整数の組 $(x_1, x_2, \dots, x_{13})$ であって，

$$\sum_{k_1=0}^1 \sum_{k_2=0}^3 \cdots \sum_{k_n=0}^{2n-1} \cdots \sum_{k_{13}=0}^{25} (-1)^{\left[\frac{k_1+k_2+\cdots+k_{13}}{2}\right]} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_{13}^{k_{13}} = 0$$

をみたすものはいくつあるか．

ただし，実数 x に対して， x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す．

記述問題

問 21 配点：19

以下の条件をみたすような素数の組 (p, q, r) をすべて求めよ.

素数 s であって, $\frac{p^s + q^s + r^s}{pqr}$ が整数になるようなものが無数に存在する.

ただし, 素数が無数に存在するという事実は証明せずに用いてよい.

問 22 配点：23

文字列 ABC を連続して 100 個繋げて得られる文字列, すなわち $\overbrace{\text{ABCABC}\cdots\text{ABC}}^{\text{ABC が 100 個}}$ から始めて, 文字列に対して以下の操作を何回か繰り返す.

A, B, C が 1 つずつ含まれるような連続する 3 文字を選び, その 3 文字を, その真ん中の文字で置き換える. 例えば, 文字列 ABCABC の前から 2, 3, 4 文字目を選んで操作を行うと, BCA が C に置き換えられ, 文字列は ACBC となる.

このとき, 最終的に長さ 2 の文字列 S となった. S としてありうるものをすべて求めよ.

問 23 配点：23

$AB < AC$ なる三角形 ABC があり, 点 B を通り点 C で直線 AC に接する円を ω , その中心を O とする. 直線 AB と ω の交点のうち B でない方を D , $\angle BAC$ の二等分線と線分 CD の交点を P , 三角形 BDP の外接円 Γ_1 と直線 AP の交点のうち P でない方を Q , 三角形 COQ の外接円 Γ_2 と ω の交点のうち C でない方を X とする. 線分 DX と Γ_1, Γ_2 の交点のうちそれぞれ D, X でない方を Y, Z とする. このとき, 点 O は三角形 QYZ の外心であることを示せ.

問 24 配点：25

正の実数に対して定義され正の実数値をとる関数 f であって, 任意の正の実数 x, y に対して

$$f((y+1)f(x)) = f(x) + xf(y)$$

が成り立つものをすべて求めよ.