PILAME 杯 2026

予選問題

2026年6月21日(日) 14:00〜17:00

注意事項

1. コンテストで使用できるものは，筆記用具・定規・コンパス・大会への参加のための情報端末・事前に印刷した解答用紙・計算用紙のみです．**分度器や電卓は使用できません．** また，情報端末を問題の閲覧・解答の提出・Zoom の参加や動画撮影以外の目的で使用してはいけません **（特に，ウェブ検索機能や AI 機能は，理由に関わらず使用できません）**．ただし，特段の事情により個別に使用が認められたものに関しては，この限りではありません．

2. 問題は全部で 24 問あり，問 1〜20 は結果のみを解答する問題（計 210 点），問 21〜24 は記述問題（計 90 点）です．問 1〜20，問 21〜24 はそれぞれおおよその難易度順（問題番号が大きいほど難しい）に並んでいます．問 20 までと問 21 以降の難易度を比較することは一切想定しておりませんので注意してください．

3. 各問題の配点は以下の通りです．

問 1	問 2	問 3	問 4	問 5	問 6	問 7	問 8
6	6	6	7	7	9	9	9
問 9	問 10	問 11	問 12	問 13	問 14	問 15	問 16
9	10	10	11	12	12	13	13
問 17	問 18	問 19	問 20	問 21	問 22	問 23	問 24
13	15	15	18	18	21	23	28

4. コンテスト中はチームの選手間でのみ会話をすることができます．

5. 解答は指定の Google フォームから提出してください．

結果のみを解答する問題

問 1　配点：6

非負整数 n に対して，以下の式をすべてみたすような**非負**整数の組 (a,b,c,d,e) の個数を $f(n)$ で表す．

$$a+b+c+d+e=n, \quad a \leqq 2, \quad b \leqq 4, \quad c \leqq 8, \quad d \leqq 16, \quad e \leqq 32$$

このとき，$f(n)$ が最大となるような n をすべて求めよ．

問 2　配点：6

平行四辺形 $ABCD$ において，辺 CD の中点を M，点 A から直線 BM へ下ろした垂線の足を H とすると，点 H は線分 BM を $2:1$ に内分した．$BC=5$, $AH=6$ のとき，線分 AB の長さを求めよ．

問 3　配点：6

2 桁の正の整数 a, b, c および 3 桁の正の整数 d は $a+b+c=d$ をみたしており，a, b, c, d の各桁の数字はどの 2 つも異なる 1 以上 9 以下の整数である．このとき，d としてありうる最小の値を求めよ．

問 4　配点：7

以下の条件をともにみたす正の整数 n のうち，最小のものを求めよ．

- n は平方数でない．
- $\{\sqrt{n}\}$, $\sqrt{n}$, $\dfrac{90}{\{\sqrt{n}\}}$ はこの順に等差数列をなす．

ただし，実数 x に対して，$\{x\}$ は x の小数部分，すなわち x を超えない最大の整数を x から引いた値を表す．

問 5　配点：7

a_1, a_2, $\ldots$, a_{100} は 1, 2, $\ldots$, 100 の並べ替えであり，b_1, b_2, $\ldots$, b_{150} は 1, 2, $\ldots$, 150 の並べ替えである．これらが，任意の 1 以上 100 以下の整数 n に対して $a_n < b_n$ をみたしているとき，組 $(a_1,a_2,\ldots,a_{100},b_1,b_2,\ldots,b_{150})$ としてありうるものはいくつあるか．

ただし，正の整数 m に対して，1, 2, $\ldots$, m の並べ替えとは，1 以上 m 以下の整数がちょうど 1 回ずつ現れる長さ m の数列である．

問 6　配点：9

凸四角形 $ABCD$ が

$$AB : BC : CD = 1 : \sqrt{3} : 2, \quad \angle BAD = 53^\circ, \quad \angle ADC = 67^\circ$$

をみたしているとき，$\angle ABC$ の大きさを求めよ．

問 7　配点：9

どの桁も 0 でない 10 以上の整数 n であって，以下の条件をみたすもののうち，最大のものを求めよ．

> n の連続する何桁かを切り出してできる正の整数について，異なる切り出し方[1]で得られるどの 2 つも互いに素である．ただし，n 自体も n から切り出してできる正の整数とみなす．

たとえば，3711 は，7 と 371 などが互いに素でないため条件をみたさない．

問 8　配点：9

3×3 のマス目の各マスに 1 以上 9 以下の相異なる整数を 1 つずつ書き込む．3 つの行それぞれについて，書き込まれた 3 つの数のうち 2 番目に大きいものを抽出し，得られた 3 つの数の中央値を M_R とする．同様に，3 つの列それぞれについて，書き込まれた 3 つの数のうち 2 番目に大きいものを抽出し，得られた 3 つの数の中央値を M_C とする．このとき，$M_R = M_C + 2$ となるような書き込み方は何通りあるか．ただし，回転や裏返しにより一致する書き込み方も異なるものとして数える．

問 9　配点：9

鋭角三角形 ABC について，辺 BC の中点を M，点 A から辺 BC に下ろした垂線の足を H とし，半直線 AH 上に $AP = BM$ をみたす点 P をとる．このとき，辺 AC, AB 上にそれぞれ点 E, F をとると，四角形 $MEPF$ は正方形となった．$MF = \sqrt{5}$, $AC = 6$ のとき，線分 AB の長さを求めよ．

問 10　配点：10

正の整数からなる数列に対して，以下の操作を行うことを考える．

> 正の整数 i であって，数列の第 i 項が i であるようなものすべてについて，数列の第 i 項を一斉に取り除く．

たとえば，1, 5, 2, 4, 3 に対して操作を行うと 5, 2, 3 に，5, 2, 3 に対して操作を行うと 5 になる．正の整数からなる長さ 10 の数列であって，操作を 3 回以内繰り返し行うことですべての数が取り除かれるようなものはいくつあるか．

[1]切り出す区間が異なれば，得られる整数が同じであっても異なる切り出し方とみなす．

問 11　配点：10

正の有理数に対して定義され，正の整数値をとる関数 f を以下のように定める．

- $x > 1$ のとき，$f(x) = f(x-1) + [x]$.
- $x < 1$ のとき，$f(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
- $x = 1$ のとき，$f(x) = 1$.

このとき，$f(x) = 100$ となる最小の正の有理数 x を求めよ．

ただし，実数 x に対して，x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す．

問 12　配点：11

正の整数からなる数列 $a_1, a_2, \ldots, a_{20}$ が以下の条件をみたしている．

任意の相異なる 1 以上 20 以下の整数 m, n について，$\dfrac{a_m + a_n}{m - n}$ は整数である．

このとき，a_1 としてありうる最小の値を求めよ．

問 13　配点：12

$AB < AC$ なる三角形 ABC の内心を I，内接円を ω とし，ω と辺 BC, CA, AB との接点をそれぞれ D, E, F とする．I に関して D と対称な点を P とし，直線 AD と ω の交点のうち D でない方を Q とする．さらに，直線 PQ と直線 EF の交点を X とすると，$AX = 8$, $ID = 3$, $PQ = 1$ が成立した．このとき，線分 AE の長さを求めよ．

問 14　配点：12

$AB < AC$ なる鋭角三角形 ABC の外心を O，垂心を H，外接円を Γ とする．また，三角形 AHO の外接円と Γ の交点のうち A でない方を D とし，点 A から辺 BC に下ろした垂線の足を E とする．さらに，三角形 ADE の外接円と直線 BC の交点のうち，E でない方を F とすると，

$$\cos\angle BAC = \frac{\sqrt{2}}{4}, \quad \cos\angle EHO = \frac{3}{4}, \quad BC = 8\sqrt{7}$$

が成立した．このとき，線分 DF の長さを求めよ．

問 15　配点：13

9×9 のマス目からいくつかのマスを選んで黒く塗る方法であって，以下の条件をともにみたすものは何通りあるか.

- 各 $i = 1, 2, \ldots, 9$ について，上から i 行目または左から i 列目の少なくとも一方に属する黒く塗られたマスは，ちょうど 3 個存在する.
- ある 9 個の正の実数 $a_1 < a_2 < \cdots < a_9$ が存在して，任意の 1 以上 9 以下の整数の組 (i, j) に対して，以下の 2 つの命題は同値である.
  - $\dfrac{a_j}{a_i}$ が整数である.
  - 上から i 行目，左から j 列目のマス目が黒く塗られている.

ただし，回転や裏返しによって一致する塗り方も異なるものとして数える.

問 16　配点：13

1 以上 20 以下の整数の組 (a, b, c) であって，x についての方程式

$$x^3 - ax^2 + (bc)x - c = 0$$

が少なくとも 1 つの正の整数解をもつものはいくつあるか.

問 17　配点：13

x についての 1000 次方程式 $x^{1000} + x^{999} + \cdots + x + 1 = 0$ は相異なる 1000 個の複素数解をもつので，それら全体の集合を S とする．S の空でない部分集合 T であって，以下の条件をみたすものはいくつあるか.

> $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_{|T|}\}$ と表すとき，正の実数の組 $(r_1, r_2, \ldots, r_{|T|})$ であって，$r_1 t_1 + r_2 t_2 + \cdots + r_{|T|} t_{|T|}$ が負の実数となるようなものが存在する.

ただし，要素数が有限個の集合 X に対して，$|X|$ で X の要素数を表す.

問 18　配点：15

ある正の有理数の平方 a と正の整数 b, c が以下の式をみたしているとき，bc としてありうる最小の値を求めよ.

$$50^4 + 50^2(-ab - bc + ca + a - b + c) - abc = 0$$

ただし，a がある正の有理数の平方であるとは，正の有理数 q であって $a = q^2$ をみたすようなものが存在することをいう.

問 19　配点：15

$S=\{1,2,\dots,100\}$ とする．S 上で定義され S に値をとる全単射な関数の組 (f,g) であって，任意の S の要素 x に対して以下の式をみたすものはいくつあるか．

$$f\bigl(\min\{f(x),g(x)\}\bigr)=g\bigl(\max\{f(x),g(x)\}\bigr)$$

ただし，S 上で定義され S に値をとる関数 h が全単射であるとは，任意の S の要素 y について，$h(x)=y$ をみたす S の要素 x がちょうど 1 つ存在することをいう．また，実数 x_1, x_2 に対して，それらの最大値，最小値をそれぞれ $\max\{x_1,x_2\}$, $\min\{x_1,x_2\}$ で表す．

問 20　配点：18

$AB<AC$ なる三角形 ABC の外接円を Γ とし，辺 AB, AC にそれぞれ点 D, E で接し，Γ に点 T で内接する円を Ω とする．直線 AT と Ω の交点のうち T でない方を S とし，Ω の点 S における接線と Γ の交点を X, Y とする．ただし，X は Γ の C を含まない方の弧 AB 上にあるものとする．直線 XD と直線 YE の交点を P としたところ，以下の条件がともに成り立った．

- 点 P は辺 BC 上にある．
- $\angle XPY=90^\circ$ である．

このとき，$\cos\dfrac{\angle BAC}{2}$ の最小多項式 f が存在するので，これを求めよ．

ただし，複素数 α に対して，最高次の係数が 1 の有理数係数多項式 f であって $f(\alpha)=0$ が成り立つようなものが存在するとき，そのうち次数が最小のものを α の最小多項式という．最小多項式は，存在すれば一意である．

記 述 問 題

問 21　配点：18

n を正の整数とする．正の整数からなる（要素数が有限個とは限らない）集合 S が**良い集合**であるとは，S が 2 個以上の要素をもち，かつ任意の $a < b$ なる S の要素 a, b が以下の条件をみたすことをいう．

> $b - a < c < b + a$ をみたすような S の要素 c であって，a, b とは異なるものが，1 個以上 n 個以下存在する．

良い集合の要素数には最大値が存在することを示し，その値を n の式で表せ．

問 22　配点：21

2026×2026 のマス目を使って，パイレーム君とピラメさんがゲームを行う．ゲームでは，パイレーム君を先手として以下の操作を交互に行う．

- パイレーム君はまだ数が書き込まれていないマスを 1 つ選び，0 を書き込む．
- ピラメさんはまだ数が書き込まれていないマスを 1 つ選び，1 を書き込む．

すべてのマスに数が書き込まれたとき，ゲームを終了する．

このとき，以下の条件をみたすような正の整数 n としてありうる最大の値を求めよ．

> パイレーム君はピラメさんの操作に関わらず，ゲーム終了時のマス目において，書き込まれた数の総和が偶数であるような行と列の個数の和を n 個以上にできる．

問 23　配点：23

$AB < AC$ なる鋭角三角形 ABC の外心を O，外接円を Γ とする．直線 AO と直線 BC の交点を D，三角形 BDO の外接円と Γ の交点のうち B でない方を E とし，直線 AE と三角形 BDO の外接円の交点のうち E でない方を P とする．また，三角形 AOP の外接円と Γ の交点のうち A でない方を F とすると，直線 FC と三角形 AOP の外接円の交点のうち F でないものが存在したので，これを X とする．このとき，$XD = XC$ が成り立つことを示せ．

問 24　配点：28

5 以上の整数 t であって，任意の正の整数 a に対して，方程式

$$ax^2 + x = (a + t)y^2 + y$$

が正の整数解 (x, y) をもつものは存在するか．