PILAME杯2024

予選解答

2024年6月23日(日) 14:00〜16:30

問1　配点：4

623

問2　配点：4

12(個)

問3　配点：4

35

問4　配点：4

-3929

問5　配点：4

$\dfrac{28}{15}$

問6　配点：5

$2, 4, 26$

問7　配点：5

7(通り)

問 8　配点：5

270

問 9　配点：6

3

問 10　配点：6

$36\pi - 54 - 18\sqrt{3}$

問 11　配点：7

18(通り)

問 12　配点：7

1012(個)

問 13　配点：7

67

問 14　配点：8

504210

問 15　配点：8

$$\frac{576}{175}$$

問 16　配点：8

$0, 73728$

問 17　配点：9

334

問 18　配点：9

$$\frac{117800}{3}$$

問 19　配点：10

$$\frac{2\times 5^{126}-3^{127}+1}{6}$$

問 20　配点：11

187

問 21　配点：12

$$\frac{20\sqrt{26}}{13}$$

問 22　配点：13

$2^{10}\times 3^{9}\times 293$

問 23　配点：14

$$\frac{19}{3}$$

問 24　配点：14

$65536\times {}_{5000}\mathrm{C}_{452}+4096\times {}_{5000}\mathrm{C}_{2500}$

問 25　配点：16

149689271(通り)

問 26　配点：25

正の整数 m について，$(2m)!!=2^m m!$, $(2m-1)!!=\dfrac{(2m)!}{2^m m!}$ とする．また，以下，合同式の法を $2n+1$ とする．

与えられた漸化式は

$$a_{n+1}-2^{n+1}=(n+1)(2n+1)(a_n-2^n)$$

と変形できる．両辺を $(n+1)!\cdot(2n+1)!!$ で割ることで

$$\frac{a_{n+1}-2^{n+1}}{(n+1)!\cdot(2n+1)!!}=\frac{(a_n-2^n)}{n!\cdot(2n-1)!!}$$

となる．これを繰り返し適用すれば，数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{(a_1-2^1)}{1!\cdot(2\times 1-1)!!}\cdot n!\cdot(2n-1)!!+2^n\\&=n!\cdot(2n-1)!!+2^n\end{aligned}$$

と求めることができる．

$2n+1$ が素数であるとき，Wilson の定理より $(2n)! \equiv -1$ が，Fermat の小定理より $2^{2n} \equiv 1$ が成立するため，

$$n!\cdot(2n-1)!! \equiv 2^{2n}\cdot n!\cdot(2n-1)!! \equiv 2^n\cdot 2^n n!\cdot(2n-1)!! \equiv 2^n\cdot(2n)!!(2n-1)!! \equiv 2^n(2n)! \equiv -2^n$$

であるから，$a_n \equiv -2^n + 2^n \equiv 0$ となる．よって，a_n は $2n+1$ で割り切れる．

問 27　配点：25

$n=1$ のときは題意は明らかに満たされるので，$n \geqq 2$ として考える．

元の数列の第 i 項を $a_{0,i}$，操作を $l(=1,2,\ldots)$ 回行って得られる数列の第 i 項を $a_{l,i}$ とする．また，任意の非負整数 l および整数 k について，k を n で割った余りが $r(=1,2,\ldots,n-1)$ のとき $a_{l,k}$ は $a_{l,r}$ を表し，k が n の倍数のとき $a_{l,k}$ は $a_{l,n}$ を表すものとする．さらに，最初の数列の項のうち最大の値を m_0，操作を $l(=1,2,\ldots)$ 回行った後の数列の項のうち最大の値を m_l とする．

補題 1　$m_0 \geqq m_1 \geqq m_2 \geqq \cdots$ である．

l を任意の正の整数として，任意の $i(=1,2,\ldots,n)$ について $a_{l,i} \leqq m_{l-1}$ であることを示せばよい．$a_{l,i} = |a_{l-1,i} - a_{l-1,i+1}|$ である．$a_{l-1,i} = a_{l-1,i+1}$ のときは $a_{l,i} = 0 \leqq m_{l-1}$ である．$a_{l-1,i} \neq a_{l-1,i+1}$ のときは，$a_{l-1,i}$，$a_{l-1,i+1}$ のうち大きい方を A，小さい方を B とすると，$a_{l,i} = A - B \leqq m_{l-1} - 0 = m_{l-1}$ である．よって示された．□

さて，ある非負整数 t に対して $m_t = 0$ が成立したとすると，$l = t, t+1, \ldots$ について $a_{l,1}, a_{l,2}, \ldots, a_{l,n}$ には 0 しか含まれないことになり，数列に含まれる整数が 1 種類となるので，主張は明らかに満たされる．よって任意の非負整数 t に対して $m_t > 0$ である場合のみ考えればよい．このとき，補題 1 より，ある正の整数 N, s が存在して $t \geqq N \Longrightarrow m_t = s$ が成立する．

補題 2　操作を N 回以上行った後の数列には s と 0 以外の整数は含まれていない．

ある整数 $M(>N)$, j, $p(>0)$ について，$a_{M,j}, a_{M,j+1}, \ldots, a_{M,j+p-1}$ がすべて 0 または s であり，かつ少なくとも 1 つは s であったとする．すると，ある 0 以上 $s-1$ 以下の整数 x について，$a_{M-1,j} \equiv a_{M-1,j+1} \equiv \cdots \equiv a_{M-1,j+p} \equiv x \pmod{s}$ が成り立つ．ここで，$M-1 \geqq N$ より $m_{M-1} = s$ だから，$a_{M-1,1}, a_{M-1,2}, \ldots, a_{M-1,n}$ に含まれる整数はすべて 0 以上 s 以下であることを踏まえると，$x \neq 0$ の場合には $a_{M-1,j} = a_{M-1,j+1} = \cdots = a_{M-1,j+p} = x$ となり，$a_{M,j}, a_{M,j+1}, \ldots, a_{M,j+p-1}$ がすべて 0 となるため矛盾する．よって，$x=0$ である．これより，$a_{M-1,j}, a_{M-1,j+1}, \ldots, a_{M-1,j+p}$ がすべて 0 または s であることが分かる．また，すべて 0 であるとすると，$a_{M,j}, a_{M,j+1}, \ldots, a_{M,j+p-1}$ がすべて 0 となり矛盾するため，少なくとも 1 つは s を含むことも分かる．

さて，$m_{N+n-1} = s$ であるから，ある整数 j であって $a_{N+n-1,j} = s$ なるものが存在するので，上の議論を $M = N+n-1, N+n-2, \ldots, N+1$ の順に適用すれば，$a_{N,1}, a_{N,2}, \ldots, a_{N,n}$ はすべて 0 または s であることがわかる．また，これ以降操作を行っても，数列には $|s-0| = |0-s| = s$ か $|s-s| = |0-0| = 0$ しか含まれ得ないことが明らかなため，主張は満たされた．□

補題 2 より，題意は満たされた．

問 28　配点：25

Γ の中心を O とし，直線 AO と CT の交点を D とする．$\angle TMB = \angle TBO = 90^\circ$ であり，O, M, T はすべて線分 BC の垂直二等分線上にあるから，三角形 TMB と TBO は相似．よって，$TM : TB = TB : TO$ で $TM \times TO = TB^2 = TP \times TA$ となり，4 点 A, O, M, P は同一円周上にある．点 A から辺 BC におろした垂線の足を H とすると，$\angle MXT = \angle MPA = \angle MOD = \angle HAD < \angle BAC = \angle MCT$ となるため，点 X は点 C に関して T と反対側にある．$\angle DOM = \angle APM = \angle TXM = \angle DXM$ だから 4 点 O, M, D, X は同一円周上にあるので，

$$\angle XMC = \angle OMC - \angle OMX = 90^\circ - \angle OMX = 90^\circ - \angle ODX = \angle DOC$$

であり，

$$2\angle ABC + \angle XMC = 2\angle ABC + \angle DOC = 2\angle ABC + 180^\circ - 2\angle ABC = 180^\circ$$

が成り立つ．したがって題意は示された．

問 29　配点：25

正八面体の各面は，隣り合う面どうしの色が異なるように白と黒で塗り分けることができる．このとき、白で塗られた面と黒で塗られた面が 4 つずつになっている．どんな形の正八面体の展開図も，この正八面体を切り開いて得ることで，隣り合う面が異なる色で塗られ，白で塗られた面と黒で塗られた面が同数ずつあるようにできる．また，正八面体の展開図を 2 色で塗り分けるとき，1 つの面の色を決めれば残りの面の色は帰納的に決まるので，その方法が 2 通り以上存在することはない．したがって，正八面体の展開図は白と黒の 2 色で塗り分けることができ，このとき必ず白で塗られた面と黒で塗られた面が同数ずつあることになる．

ここで，一辺が 11 の正三角形の紙において，分けられた一辺が 1 の正三角形を「小三角形」と呼ぶことにし，各小三角形が相異なる色で塗られるように白と黒の 2 色で塗り分けると，一方の色は $1+2+\cdots+10 = 55$ 個の小三角形にしか塗られない．ここから一辺が 1 の正八面体の展開図を 14 個以上切り出すことができると仮定すると，展開図に使われた面の色は 56 個以上ずつの小三角形に塗られていることになり，矛盾する．よって一辺が 1 の正八面体の展開図を 14 個以上切り出すことはできない．