PILAME杯 2024

決勝問題（第１部）

2024年8月24日(土) 10:00〜12:30

注 意 事 項

1. コンテストで使用できるものは，筆記用具・定規・コンパス・情報端末（オンライン参加の方のみ）・解答用紙・計算用紙のみです．分度器や電卓は使用できません．また，情報端末を問題の閲覧・解答の提出・チーム内のやり取り（現地オンライン併用チームのみ）以外の目的で使用してはいけません．
2. 問題は全部で 8 問あり，すべて記述問題（計 280 点）です．各問題は，おおよその難易度順（問題番号が大きいほど難しい）に並んでいます．
3. 各問題の配点は以下の通りです．**予選問題と決勝問題の配点を比較することは一切想定しておりません**ので注意してください．

問 1	問 2	問 3	問 4	問 5	問 6	問 7	問 8
20	20	30	30	30	40	50	60

4. コンテスト中はチームの選手間でのみ会話をすることができます．
5. 解答はすべて解答用紙に記述してください．問題用紙や計算用紙は回収しませんので，問題用紙や計算用紙に記入した解答は採点されません．
6. オンライン参加者，現地オンライン併用チームに適用される追加の注意事項を裏表紙に記載しています．対象者は必ず読んでください．

問 1　配点：20

実数に対して定義され実数値をとる関数 f であって，任意の実数 x, y に対して

$$f(f(x)-y)^2 = f(x)^2 + 2xy + f(y)^2$$

が成り立つようなものをすべて求めよ．

問 2　配点：20

N を 3 以上の整数とする．N 人の人がおり，最初はどの 2 人も互いに友人ではないとする．以下のようなイベントを何回か起こすことで，どの 2 人も互いに友人であるようにできるような N をすべて求めよ．

> N 人のうちの 3 人を選び，A, B, C とする．2 人組 (A, B)，(B, C)，(C, A) それぞれについて，互いに友人である場合は互いに友人でなくなり，互いに友人でない場合は互いに友人になる．

問 3　配点：30

$AB \neq AC$ をみたす三角形 ABC があり，その内心と外心をそれぞれ I, O，辺 BC の中点を M とする．また，点 A から辺 BC へ下ろした垂線と直線 MI の交点を P とする．点 P が三角形 ABC の内接円上にあるとき，直線 OI, BC は平行であることを示せ．

問 4　配点：30

正の整数 n であって，$\sqrt{(3n-1)^n - n^n}$ が整数となるようなものをすべて求めよ．

問 5　配点：30

N を 3 以上の整数とする．同一平面上に正 N 角形 $A_1A_2\cdots A_N$ と点 X がある．任意の 1 以上 N 以下の整数 n について，1 以上 N 以下の整数 i であって $XA_i=n$ なるものが存在するとき，N としてありうる値をすべて求めよ．

問 6　配点：40

非負整数 n であって，$\dfrac{2^{3n+1}+2^{n+1}-3^n}{2\cdot 6^n+1}$ が整数となるようなものをすべて求めよ．

問 7　配点：50

$a_1,a_2,\ldots,a_{300}$ および $b_1,b_2,\ldots,b_{300}$ および $c_1,c_2,\ldots,c_{300}$ はそれぞれ $1,2,3,\ldots,300$ の並び替えである．このとき，1 以上 300 以下の整数の組 (i,j,k) であって

$$a_i>a_j,\ a_i>a_k,\ b_j>b_i,\ b_j>b_k,\ c_k>c_i,\ c_k>c_j$$

をみたすものの個数としてありうる最大の値を求めよ．ただし，$1,2,\ldots,300$ の並べ替えとは，1 以上 300 以下の整数がちょうど 1 回ずつ現れる長さ 300 の数列である．

問 8　配点：60

n を非負整数とする．正の整数に対して定義され非負整数値をとる関数 f が任意の正の整数 x について

$$f(x)+f(2x)+f(3x)=n$$

をみたすとき，非負整数の組 $(f(1),f(2),...,f(6000))$ としてありうるものの個数を $P(n)$ とおく．このとき，任意の非負整数 n に対して $P(n)$ が平方数であることを示せ．

【追加の注意事項（オンライン参加者)】

オンライン参加者は，答案提出フォームで提出する際，以下の注意事項 7〜11 も厳守してください．

7. 答案は明瞭な文字で作成し，写真を撮るなどして答案提出フォームから提出してください．
8. 答案の内容を変更せず，内容の視認性を上げる目的に限り，予選と同様，明るさの調整等の画像の編集を認めます．
9. 提出可能時間は，試験開始時間から試験終了時間までの間のみです．特に運営側に問題が発生した場合を除き，試験時間外の提出は認めません．
10. 求値問題の答案は，求値問題全体で枚数の上限を 3 枚としますが，用紙の大きさの指定はありません．もちろん，複数の問題を 1 枚の用紙にまとめて解答しても構いません．
11. 記述問題の答案は，用紙は A4 ならば 3 枚，B4 ならば 2 枚のものに限ります．また，1 枚の答案に複数の記述問題を解答することはできません．複数の記述問題を 1 枚の答案にて解答した場合，その答案は採点されません．なお，答案は B4 サイズ 2 枚を推奨します．

【追加の注意事項（現地オンライン併用チーム)】

現地参加者とオンライン参加者の両方がいるチームは，以下の注意事項 12,13 も厳守してください．

12. 一つの問題に対して，現地での提出とフォームでの提出の両方を行うことはできません．現地とオンライン両方での提出があった場合，現地で提出された答案のみが採点されるので注意してください．
13. 現地参加者とオンライン参加者が話し合い等のやり取りを行う場合は，音声を伴う通話方法を使用してください（例：Zoom，LINE 電話，Discord 通話)．チャットなど，音声を伴わない手段でやり取りをすることはできません．