



PILAME 杯 2024

決勝問題（第2部）

2024年8月25日(日) 11:40～13:20

注意事項

1. コンテストで使用できるものは、筆記用具・定規・コンパス・情報端末（オンライン参加，現地オンライン併用チームの方のみ）・解答用紙・計算用紙のみです。分度器や電卓は使用できません。また，情報端末を問題の閲覧・解答の提出・チーム内のやり取り（現地オンライン併用チームのみ）以外の目的で使用してはいけません。
2. 問題は全部で14問あり，問1～2は記述問題（計100点），問3～14は結果のみを解答する問題（計120点）です。問1～2，問3～14はそれぞれおおよその難易度順（問題番号が大きいほど難しい）に並んでいます。問2までと問3以降の難易度を比較することは一切想定しておりませんので注意してください。
3. 各問題の配点は以下の通りです。予選問題と決勝問題の配点を比較することは一切想定しておりませんので注意してください。

問1	問2	問3	問4	問5	問6	問7
50	50	5	6	7	8	10
問8	問9	問10	問11	問12	問13	問14
11	11	11	12	12	13	14

4. コンテスト中はチームの選手間でのみ会話を行うことができます。
5. 解答はすべて解答用紙に記述してください。問題用紙や計算用紙は回収しませんので，問題用紙や計算用紙に記入した解答は採点されません。
6. オンライン参加者，現地オンライン併用チームに適用される追加の注意事項を裏表紙に記載しています。対象者は必ず読んでください。

Sponsored by



(このページは草稿に使用してかまいません.)

記述問題

問1 配点：50

2024 × 2024 のマス目があり、各マスには正の整数が1つずつ書き込まれている。1以上2024以下の整数 i, j について、上から i 行目、左から j 列目に書き込まれた数を $a_{i,j}$ とする。このマス目が以下の条件をみたすとき、**すごいマス目** とよぶことにする。

1以上2024以下の整数の組 (i, j, k, l) であって、

$$a_{i,j} = a_{k,j}, \quad a_{k,j} = a_{k,l}, \quad i \neq k, \quad j \neq l$$

をすべてみたすようなものが存在しない。

マス目に書き込まれた正の整数のうち最大のものをそのマス目の **スコア** とよぶ。すごいマス目のスコアとしてありうる最小の値を求めよ。

問2 配点：50

$AB < AC$ なる三角形 ABC について、内心を I 、直線 AI と辺 BC の交点を D とし、線分 DC 上に点 P をとる。辺 AB 上の点 E が $BP = BE$ を、辺 AC 上の点 F が $CP = CF$ をみたしており、直線 PI 上に I と異なる点 X をとると、4点 A, E, F, X を通る円が存在した。直線 AX と辺 BC の交点を Y 、点 P を通り辺 BC に垂直な直線と直線 BI, CI の交点をそれぞれ Z, W とするとき、三角形 AYD の外接円と三角形 IZW の外接円は接することを示せ。

結果のみを解答する問題

問3 配点：5

10×10 のマス目から相異なる 2 マスを選んで黒く塗り、残る 98 マスそれぞれに対して、そのマスと辺または頂点を共有するマスのうち黒く塗られたものの個数を書き込む。このとき、書き込まれた 98 個の数の総和がちょうど 8 となるように 2 マスを黒く塗る方法は何通りあるか。

ただし、回転や裏返しで一致する塗り方も異なるものとして考えるものとする。

問4 配点：6

$1, 2, \dots, 8$ の並び替え a_1, a_2, \dots, a_8 について、以下の値のとりうる最大の値を求めよ。

1 以上 8 以下の整数の組 (l, r) であって $l < r$ をみたすようなものすべてについて、 $a_l + a_{l+1} + \dots + a_r$ の値を足し合わせた値。

ただし、 $1, 2, \dots, 8$ の並び替えとは、1 以上 8 以下の整数がちょうど 1 回ずつ現れる長さ 8 の数列である。

問5 配点：7

一辺の長さが 10 の正三角形 ABC の辺 AB, BC, CA 上にそれぞれ点 P, Q, R をとったところ、 $PQ = QR$, $\angle PQR = 90^\circ$, $PR = 7$ が成り立った。このとき、三角形 APR の面積を求めよ。

問6 配点：8

正の整数 N に対して、 $f(N)$ を以下のように定める。

n を N の正の約数の個数とし、 N の正の約数を $d_1 < d_2 < \dots < d_n$ としたとき、 $1 \leq i \leq j \leq n$ をみたす正の整数の組 (i, j) であって、 d_j が d_i で割り切れるものの個数。

このとき、1 以上 200 以下の整数 N であって、 $f(N) = 36$ をみたすものをすべて求めよ。

問 7 配点：10

1 から 100 までの数が書かれたカードが 1 枚ずつ入った箱がある。はじめスコアは 0 であるとし、以下のような操作を繰り返し行う。

無作為に箱から 1 枚のカードを取り出し、書かれた数をスコアに加算し、カードを箱に戻す。

スコアがはじめて 100 以上になったとき、これ以上操作を行うのをやめる。このとき、操作を終了した時点でのスコアがちょうど 101 となるような確率を求めよ。

問 8 配点：11

一辺の長さが 1 の正十角形 $A_1A_2\cdots A_{10}$ と点 P が同一平面上にあり、線分 A_1A_6 の中点を M とすると、 $2MP = MA_1$ が成り立った。 $PA_1 \times PA_2 \times \cdots \times PA_{10}$ としてありうる最大の値を X 、最小の値を Y とするとき、 $\frac{Y}{X}$ を求めよ。

問 9 配点：11

1 以上 50 以下の整数 n であって、ある正の整数 x, y, z が存在して

$$(xy + yz + zx)^3 = xyz(x + y + z)^3 = n^3$$

をみたすようなものをすべて求めよ。

問 10 配点：11

n を 2 以上の整数とする。正の整数の組 (x_1, x_2, \dots, x_n) は以下の条件をみたす。

- $1 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < 300^{300}$.
- $i = 1, 2, \dots, n - 1$ について、 x_{i+1} は x_i の倍数である。
- x_n は 300^{300} の約数である。
- x_1, x_2, \dots, x_n の正の約数の総和はいずれも偶数である。

n としてありうる最大の値を N とするとき、組 (x_1, x_2, \dots, x_N) としてありうるものはいくつあるか。

問 11 配点：12

三角形 ABC の内部に点 P をとり、直線 AP と直線 BC 、直線 BP と直線 CA 、直線 CP と直線 AB の交点をそれぞれ D, E, F とする。また、点 D から直線 EF に下ろした垂線の足を X とする。 $AP = 3$ 、 $PD = 2$ 、 $\angle AXP = 120^\circ$ が成り立つとき、線分 DX の長さを求めよ。

問 12 配点：12

実数 a, b, c, d が $ab = cd$ 、 $0 < a, b, c, d < 1$ をみたすとき、

$$\frac{a^2 + c^2}{3a^2\sqrt{b^2 - b^4} + 4c^2\sqrt{d^2 - d^4}}$$

のとりうる最小の値を求めよ。

問 13 配点：13

等しい個数の A と B からなる文字列であって、連続する部分文字列 AB をひとつ選んで消すことを繰り返すことで空文字列にできる文字列を、正しい AB 文字列 とよぶ。例えば、 $ABAABB$ 、 $AAABBB$ 、 $ABABAB$ は正しい AB 文字列であり、 $ABABBA$ 、 $AAAABB$ 、 $BBBAAA$ は正しい AB 文字列ではない。また、長さ 100 の正しい AB 文字列すべてからなる集合を S とし、 $T (\in S)$ のスコアを以下のように定める。

1 以上 100 以下の整数の組 (i_1, i_2) であって、

- T の左から i_1 番目の文字は A 、左から i_2 番目の文字は B である。
- T の左から i_1 番目の文字と左から i_2 番目の文字を取り除いてできる文字列も正しい AB 文字列である。

をみたすものの個数。

$T (\in S)$ のスコアとしてありうる値のうち 10 番目に大きいものを N とする。スコアが N であるような $T (\in S)$ はいくつあるか。

問 14 配点：14

鋭角三角形 ABC について、垂心を H とし、点 A を通り点 B において直線 BC と接する円と三角形 AHC の外接円の交点のうち、 A ではない方を X とする。

$$AX = 8, \quad BC = 11, \quad XB \cdot XC = 36$$

が成り立つとき、線分 AC の長さを求めよ。

【追加の注意事項（オンライン参加者）】

オンライン参加者は、答案提出フォームで提出する際、以下の注意事項7～11も厳守してください。

7. 答案は明瞭な文字で作成し、写真を撮るなどして答案提出フォームから提出してください。
8. 答案の内容を変更せず、内容の視認性を上げる目的に限り、予選と同様、明るさの調整等の画像の編集を認めます。
9. 提出可能時間は、試験開始時間から試験終了時間までの間のみです。特に運営側に問題が発生した場合を除き、試験時間外の提出は認めません。
10. 求値問題の答案は、求値問題全体で枚数の上限を3枚としますが、用紙の大きさの指定はありません。もちろん、複数の問題を1枚の用紙にまとめて解答しても構いません。
11. 記述問題の答案は、用紙はA4ならば3枚、B4ならば2枚のものに限ります。また、1枚の答案に複数の記述問題を解答することはできません。複数の記述問題を1枚の答案にて解答した場合、その答案は採点されません。なお、答案はB4サイズ2枚を推奨します。

【追加の注意事項（現地オンライン併用チーム）】

現地参加者とオンライン参加者の両方がいるチームは、以下の注意事項12,13も厳守してください。

12. 一つの問題に対して、現地での提出とフォームでの提出の両方を行うことはできません。現地とオンライン両方での提出があった場合、現地で提出された答案のみが採点されるので注意してください。
13. 現地参加者とオンライン参加者が話し合い等のやり取りを行う場合は、音声を伴う通話方法を使用してください（例：Zoom, LINE 電話, Discord 通話）。チャットなど、音声を伴わない手段でやり取りをすることはできません。