PILAME 杯 2024

予選問題

2024年6月23日(日) 14:00〜16:30

注意事項

1. コンテストで使用できるものは，筆記用具・定規・コンパス・大会用サイトのための情報端末・事前に印刷した記述解答用紙・計算用紙のみです．分度器や電卓は使用できません．また，情報端末を問題の閲覧・解答の提出以外の目的で使用してはいけません．
2. 問題は全部で 29 問あり，問 1〜25 は結果のみを解答する問題 (計 200 点)，問 26〜29 は記述問題 (計 100 点) です．問 1〜25，問 26〜29 はそれぞれおおよその難易度順 (問題番号が大きいほど難しい) に並んでいます．**問 25 までと問 26 以降の難易度を比較することは一切想定しておりません**ので注意してください．
3. 各問題の配点は以下の通りです．

問 1	問 2	問 3	問 4	問 5	問 6	問 7	問 8	問 9	問 10
4	4	4	4	4	5	5	5	6	6
問 11	問 12	問 13	問 14	問 15	問 16	問 17	問 18	問 19	問 20
7	7	7	8	8	8	9	9	10	11
問 21	問 22	問 23	問 24	問 25	問 26	問 27	問 28	問 29	−
12	13	14	14	16	25	25	25	25	−

4. コンテスト中はチームの選手間でのみ会話をすることができます．
5. 解答はすべて大会用サイトで提出してください．

Sponsored by

ELYSIUM

問 1　配点：4

黒板に 2 以上 48 以下の**偶数**が 1 つずつ書かれている．黒板に書かれた数がちょうど 1 つになるまで以下の操作を繰り返すとき，最終的に黒板に書かれている数としてありうる値をすべて求めよ．

> 黒板に書かれている数が 2 つ以上あるとき，黒板に書かれている 2 数を選んでそれらを消し，選んでいた 2 数の和を s として，黒板に $s+1$ を書き加える．

問 2　配点：4

正の整数の組 (a,b) であって $a^b=100^{100}$ をみたすものはいくつあるか．

問 3　配点：4

平行四辺形 $ABCD$ がある．三角形 ABD の内部に点 P をとったところ，三角形 PAD, PAB, PBC の面積がそれぞれ 11, 23, 58 となった．このとき，三角形 PBD の面積を求めよ．

問 4　配点：4

実数 a, b, c, d であって，任意の実数 x に対し

$$x^4-x^3-1876x^2+3994x-2052=\left(x^2+ax+b\right)\left(x^2+cx+d\right)$$

が成り立つものについて，$a+b+c+d+ac+bd$ を求めよ．

問 5　配点：4

$\angle ACB=90^\circ$ なる直角三角形 ABC の辺 BC 上に点 D をとり，D から辺 AB におろした垂線の足を E としたとき，$AC=CE=4$, $AD=5$ が成立した．このとき，線分 BE の長さを求めよ．

問 6　配点：5

2 以上の整数 n であって，$\dfrac{n^n+2024}{n^2-1}$ が整数になるようなものをすべて求めよ．

問 7　配点：5

白玉と黒玉を 6 個ずつ一列に並べる方法であって，以下の条件をみたす正の整数 N としてありうる最小の値が 31 となるものは何通りあるか．

> 隣り合う 2 つの玉を選んでそれらを入れ替えるという操作を N 回繰り返すことで，左から 6 つの玉がすべて白玉であるようにできる．

ただし，同じ色の玉どうしは区別しないものとする．

問 8　配点：5

以下の条件をみたす正の整数 n としてありうる最小の値を求めよ．

> 任意の 1 以上 9 以下の整数 i について，n の正の約数であって一の位が i であるものが存在する．

問 9　配点：6

いずれも 0 でない複素数 $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ が

$$x_1+\frac{1}{x_2}=x_2+\frac{1}{x_3}=\cdots=x_{99}+\frac{1}{x_{100}}=1, \quad x_1+x_2+\cdots+x_{100}=100$$

をみたしているとき，x_{50} としてありうる複素数値すべてを足し合わせた値を求めよ．

問 10　配点：6

鋭角三角形 ABC の外接円上の 3 点 P, Q, R はそれぞれ以下の条件をみたすように動く．

- $\angle BPC=\angle BAC, \quad \angle PBC \leqq 90^\circ, \quad \angle PCB \leqq 90^\circ$.
- $\angle CQA=\angle CBA, \quad \angle QCA \leqq 90^\circ, \quad \angle QAC \leqq 90^\circ$.
- $\angle ARB=\angle ACB, \quad \angle RAB \leqq 90^\circ, \quad \angle RBA \leqq 90^\circ$.

P, Q, R がくまなく動いたときの三角形 PBC, QCA, RAB の垂心の軌跡をそれぞれ C_P, C_Q, C_R とすると，軌跡の長さはそれぞれ $3\pi, 4\pi, 5\pi$ となった．このとき，C_P, C_Q によって囲まれた領域，C_Q, C_R によって囲まれた領域，C_R, C_P によって囲まれた領域の面積を足し合わせた値を求めよ．

問 11　配点：7

4×4 のマス目の各マスに 1 以上 4 以下の整数を 1 つずつ書き込む方法であって，以下の条件をみたすものは何通りあるか．

> 1 以上 4 以下の整数 a, b, c について，上から a 行目，左から b 列目のマスに c が書き込まれているならば，上から b 行目，左から c 列目のマスには a が書き込まれている．

問 12　配点：7

2024 以下の正の整数が 1 つずつ書かれている黒板がある．積が平方数になるような 2 つの整数を消すという操作を繰り返し行うとき，最終的に黒板に残った整数の個数としてありうる最小の値を求めよ．

問 13　配点：7

正六面体 $ABCD-EFGH$ の各面に 1 から 6 までの整数を重複なく 1 つずつ書くことを考える．このとき，12 本の辺それぞれについて，その辺を共有して隣接している 2 つの面に書かれた整数の**積**をその辺の**スコア**とよび，8 個の頂点それぞれについて，その頂点を端点の 1 つとして持っている 3 つの辺のスコアの**和**をその頂点の**スコア**とよぶ．頂点 X のスコアを $s(X)$ で表すとき，

$$\max\{\, s(A)+s(G),\ s(B)+s(H),\ s(C)+s(E),\ s(D)+s(F)\,\}$$

のとりうる最小の値を求めよ．なお，n を正の整数として，実数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ に対し，それらにおける最大の値を $\max\{\, a_1, a_2, \ldots, a_n\,\}$ で表す．

問 14　配点：8

非負整数 N に対し，$f(N)$ を以下のように定める．

- $f(0)=0$.
- $N \geqq 1$ のとき，N を 7 で割った商を A，余りを B として，$f(N)=f(A)+A+B$.

このとき，$f(1)+f(2)+\cdots+f(2400)$ を求めよ．

問 15　配点：8

ある円の周上に 5 点 A, B, C, D, E がこの順にある．線分 AC と線分 BE の交点を P，線分 AD と線分 BE の交点を Q とする．$AB=AE=8$，$CD=DP=6$，$CQ=7$ のとき，線分 PQ の長さを求めよ．

問 16　配点：8

整数 k であって，x の 3 次方程式 $x^3-104x^2+k=0$ の複素数解がすべて整数になるようなものをすべて求めよ．

問 17　配点：9

n を正の整数とする．X に関する 11 次方程式

$$X^{11}+X^{10}+X^9+5X^8+5X^7+5X^6+7X^5+7X^4+7X^3+10X^2+10X+10=0$$

のすべての複素数解 (11 個) の n 乗の和を S_n とすると，これは必ず整数になるので，S_n を 5 で割った余りを T_n とする．このとき，$T_1+T_2+\cdots+T_{100}$ を求めよ．

問 18　配点：9

xy 平面上の直線 $y = 101$ 上の x 座標が $0^3, 1^3, \ldots, 100^3$ であるような 101 個の点に印がついている．$i = 100, 99, \ldots, 1$ の順に以下の操作を行う．

> $k = 1, 2, \ldots, i$ について，直線 $y = i + 1$ 上の左から k 番目，$k + 1$ 番目の印がついた点を結ぶ線分を考え，この線分を $1 : 2$ に内分する点を通り y 軸に平行な直線と直線 $y = i$ の交点に印をつける．

このとき，直線 $y = 1$ 上には 1 つだけ印がついた点が存在する．その点の x 座標を求めよ．

問 19　配点：10

正の整数に対して，最高位の数字を取り去るという操作を，3 の倍数になるか数字がなくなるまで行うことを考える．そして，はじめの正の整数が N であるときに，行われる操作の回数を $f(N)$ で表す．例えば，$f(251) = 1,\ f(4536) = 0,\ f(33311) = 5$ である．このとき，各桁の数字が 1, 2, 3, 4, 5 のいずれかであるような 125 桁の正の整数 n すべてについて $f(n)$ を足し合わせた値を求めよ．

問 20　配点：11

n を 2 以上の整数とする．n 個の正の整数からなる数列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ は以下の条件をみたす．

- $i = 1, 2, \ldots, n - 1$ について，$a_i \neq a_{i+1}$ であり，a_i と a_{i+1} のうち大きい方を A，小さい方を B としたとき，B は A の正の約数のうち 2 番目に大きいものである．
- $a_1, a_2, \ldots, a_n$ の中に 1 以上 100 以下の整数がすべて含まれる．

このとき，n としてありうる最小の値を求めよ．

問 21　配点：12

鋭角三角形 ABC の垂心を H とし，直線 BH と辺 AC，直線 CH と辺 AB の交点をそれぞれ E, F，線分 AH と線分 EF の交点を G とすると，$AE = 3,\ EC = 5,\ \angle BGH = \angle HBC$ が成立した．このとき，辺 BC の長さを求めよ．

問 22　配点：13

$P = 2^{11} \times 3^{10} + 1$ は素数である．$i = 1, 2, \ldots, P - 1$ に対して，1 以上 $P - 1$ 以下の整数のうち i 以外からなる集合を S_i とする．また，S_i の要素からいくつかを選ぶとき，選んだ整数すべてを掛け合わせた値をその選び方の**スコア**とする．$i = 1, 2, \ldots, P - 1$ および $k = 1, 2, \ldots, P - 2$ に対し，S_i の要素から相異なる k 個を選ぶ選び方すべてについてそのスコアを足し合わせた値を $f(i, k)$ で表すとき，$f(i, k) \equiv 1 \pmod{P}$ をみたす組 (i, k) の個数を求めよ．

問 23　配点：14

三角形 ABC の外接円の A を含まない方の弧 BC 上に点 D をとり，線分 AD と辺 BC の交点を E とする．辺 AB 上に点 P, S，線分 AD 上に点 Q，辺 BC 上に点 R をとり，線分 RS 上に点 T をとると，3 点 P, Q, C は同一直線上にあり，次が成り立った：

$$PR \parallel AD, \quad AP = PD, \quad DR = RS, \quad PQ = QR,$$

$$AD = 10, \quad TE = 7, \quad AB : BE = 7 : 6, \quad \angle RTE = \angle RQE.$$

このとき，線分 PR の長さを求めよ．

問 24　配点：14

α を**複素数**とする．**複素数**からなる数列 $a_1, a_2, \ldots$ を

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \alpha, \quad a_n = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_{n-1} - 2 \ (n = 3, 4, \ldots)$$

で定める．$a_{15} = 15$ のとき，α としてありうる値すべてについて $(\alpha - 1)^{5000}$ を足し合わせた値を求めよ．

問 25　配点：16

24×20 の長方形のマス目があり，1 以上 24 以下の整数 x および 1 以上 20 以下の整数 y に対して，上から x 行目，左から y 列目のマスを (x, y) で表す．はじめはすべてのマスが白く塗られており，駒が $(1, 1)$ に置かれている．以下の操作を考える．

> 操作前に駒があるマスを (x, y) として次のうちいずれかを行う．ただし，$(x, 21)$, $(25, y)$ はそれぞれ $(x, 1), (1, y)$ のことを表すものとする．
>
> - $(x, y+1)$ が白く塗られているとき，$(x, y+1)$ を黒く塗って駒を $(x, y+1)$ に移動させる．ただし，$(x, y+1)$ が元から黒く塗られているとき，この操作は行えない．
> - $(x+1, y)$ が白く塗られているとき，$(x+1, y)$ を黒く塗って駒を $(x+1, y)$ に移動させる．ただし，$(x+1, y)$ が元から黒く塗られているとき，この操作は行えない．

操作を何回か行った結果，駒が $(1, 1)$ にあり，475 マス以上が黒く塗られていた．それまでに行われた操作の方法としてありうるものは何通りあるか．

問 26　配点：25

正の整数からなる数列 $a_1, a_2, \ldots$ が

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = (n+1)(2n+1)\,a_n - 2^n\left(2n^2 + 3n - 1\right) \ (n = 1, 2, \ldots)$$

をみたすとき，正の整数 n について，$2n+1$ が素数であるならば a_n が $2n+1$ で割り切れることを示せ．

問 27　配点：25

n を 2 以上の整数とする．n 個の非負整数からなる数列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ に対して，以下の操作を繰り返し行うことを考える．

$$b_1 = |a_1 - a_2|,\ b_2 = |a_2 - a_3|,\ \ldots, b_{n-1} = |a_{n-1} - a_n|,\ b_n = |a_n - a_1|$$

として，$a_1, a_2, \ldots, a_n$ を $b_1, b_2, \ldots, b_n$ で一斉に置き換える．

このとき，元の数列に関わらず，操作を有限回行うことで，数列に含まれる整数を 2 種類以下にできることを示せ．

問 28　配点：25

$AB < AC$ なる鋭角三角形 ABC の外接円を Γ，辺 BC の中点を M とする．点 B における Γ の接線と点 C における Γ の接線の交点を T，直線 AT と Γ の交点のうち A でない方を P，三角形 MPT の外接円と直線 CT の交点のうち T でない方を X とするとき，$2\angle ABC + \angle XMC = 180^\circ$ が成り立つことを示せ．

問 29　配点：25

一辺が 11 の正三角形の紙があり，点線によって一辺が 1 の正三角形 121 個に分けられている．点線に沿って紙をカッターで切って，一辺が 1 の正八面体の展開図を 14 個以上切り出すことはできないことを示せ．ただし，切り出す展開図は互いに異なる形でもよい．

なお，一辺が 1 の正八面体の展開図は，回転や裏返しによって重なるものを同じものと考えると 11 種類あるが，この事実を証明なしに使ってはならない．