PILAME 杯 2025

決勝問題（第１部）

2025年8月11日(月・祝) 12:45〜16:15

注 意 事 項

1. コンテストで使用できるものは，筆記用具・定規・コンパス・解答用紙・計算用紙，および特段の事情により個別に認められたもののみです．分度器や電卓は使用できません．

2. 問題は全部で8問あり，すべて記述問題（計300点）です．各問題は，おおよその難易度順（問題番号が大きいほど難しい）に並んでいます．

3. 各問題の配点は以下の通りです．**予選問題と決勝問題の配点を比較することは一切想定しておりません**ので注意してください．

問1	問2	問3	問4	問5	問6	問7	問8
20	20	30	30	45	45	55	55

4. コンテスト中はチームの選手間でのみ会話をすることができます．

5. 解答はすべて解答用紙に記述してください．問題用紙や計算用紙は回収しませんので，問題用紙や計算用紙に記入した解答は採点されません．

Sponsored by

ELYSIUM

問 1　配点：20

正の整数からなる数列 $a_1, a_2, a_3, \ldots$ がある．この数列に含まれる整数を全種類 1 個ずつ昇順に並べた数列 $b_1 < b_2 < b_3 < \cdots$ が無限に続くとき，任意の正の整数 i に対して $a_i + b_i < a_{i+1} + b_{i+1}$ が成り立つならば，ある正の整数 n が存在して $a_n = b_n$ となることを示せ．

問 2　配点：20

正の整数の組 (a, b, p, q) であって，以下の条件をともにみたすものをすべて求めよ．

- p, q は素数であり，$p \geqq q$ をみたす．
- $p^a + p^b = a^q + 1$ が成り立つ．

問 3　配点：30

n を整数とする．整数に対して定義され整数値をとる全単射な関数 f であって[1]，任意の整数 a, b に対して

$$f^b(a) + f^{f(b)}(a) = n$$

が成り立つようなものをすべて求めよ．

ただし，任意の整数 a, b に対して，$f^0(a) = a$ および $f^{b+1}(a) = f\big(f^b(a)\big)$ が成り立つものとする．

問 4　配点：30

n を正の整数とする．整数からなる数列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ は以下の条件をみたす．

1 以上 n 以下の整数 i に対して，i 以下の整数は i 個以上連続しない．

$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ としてありうる最小の値を m とするとき，$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = m$ をみたすような数列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ はいくつあるか．

[1] 整数に対して定義され整数値をとる関数 f が**全単射**であるとは，以下の条件をともにみたすことをいう．

- 任意の整数 x_1, x_2 に対して，$f(x_1) = f(x_2)$ ならば $x_1 = x_2$ が成り立つ．
- 任意の整数 y に対して，ある整数 x が存在して $f(x) = y$ が成り立つ．

問 5　配点：45

$AB \neq AC$ なる三角形 ABC があり，その垂心を H とする．直線 AH と直線 BC，直線 BH と直線 CA，直線 CH と直線 AB との交点をそれぞれ D, E, F，直線 BC と直線 EF との交点を X とし，三角形 DEF の外接円と三角形 ADX の外接円との交点のうち D でない方を Y とする．線分 BC の中点を M とし，直線 AM と三角形 ABC の外接円との交点のうち A でない方を Z，直線 AM に関して Y と対称な点を Y' とするとき，直線 XY' と直線 HZ は垂直に交わることを示せ．

問 6　配点：45

a を正の整数とする．$a^n + 2^n + 1$ が 3 で割って 2 余る素因数をもつような正の整数 n が存在しないならば，a は 4 で割り切れることを示せ．

問 7　配点：55

n を正の整数とする．平面上に $3n$ 個の点があり，そのうちどの 3 点も同一直線上にない．これらの点を**良い点**とよぶ．

良い点を 3 個ずつ選んで n 個の三角形 $T_1, \ldots, T_n$ を作る方法であって，そのうちのどの 2 つの頂点も相異なり，以下の条件をみたすものが存在することを示せ．

$T_1, \ldots, T_n$ すべての内部（外周を含む）に含まれる点が平面上に存在する．

問 8　配点：55

どの 2 辺の長さも等しくない鋭角三角形 ABC がある．また，点 D, E, F, G, H, I があり，以下の条件をすべてみたしている．

- 点 D, E は直線 BC に関して A と反対側にあり，四角形 $BCDE$ は正方形である．
- 点 F, G は直線 CA に関して B と反対側にあり，四角形 $CAFG$ は正方形である．
- 点 H, I は直線 AB に関して C と反対側にあり，四角形 $ABHI$ は正方形である．

直線 BF, CI の交点を P，直線 BG, CH の交点を Q，直線 CH, AE の交点を R，直線 CI, AD の交点を S，直線 AD, BG の交点を T，直線 AE, BF の交点を U とする．このとき，三角形 APQ の外接円，三角形 BRS の外接円，三角形 CTU の外接円すべてが共通する 2 点を通ることを示せ．