



PILAME 杯 2025

決勝問題（第2部）

2025年8月12日(火) 9:45～11:45

注意事項

1. コンテストで使用できるものは、筆記用具・定規・コンパス・解答用紙・計算用紙、および特段の事情により個別に認められたものののみです。分度器や電卓は使用できません。
2. 問題は全部で12問あり、問1～2は記述問題（計70点）、問3～12は結果のみを解答する問題（計130点）です。問1～2、問3～12はそれぞれおよその難易度順（問題番号が大きいほど難しい）に並んでいます。問2までと問3以降の難易度を比較することは一切想定しておりませんので注意してください。
3. 各問題の配点は以下の通りです。予選問題と決勝問題の配点を比較することは一切想定しておりませんので注意してください。

問1	問2	問3	問4	問5	問6	問7	問8	問9	問10	問11	問12
35	35	8	8	10	12	12	12	14	16	18	20

4. コンテスト中はチームの選手間でのみ会話を行うことができます。
5. 解答はすべて解答用紙に記述してください。問題用紙や計算用紙は回収しませんので、問題用紙や計算用紙に記入した解答は採点されません。

Sponsored by



(このページは草稿に使用して構いません.)

記述問題

問1 配点：35

任意の正の整数 n に対して、凸四角形 $A_n B_n C_n D_n$ は長方形であり、その辺の長さがすべて整数である。また、任意の正の整数 n に対して、これらが以下の条件をすべてみたしている。

- 点 A_n は、直線 $A_{n+1} B_{n+1}$ 上にあり、 A_{n+1} と B_{n+1} と一致しない。
- 点 B_n は、直線 $B_{n+1} C_{n+1}$ 上にあり、 B_{n+1} と C_{n+1} と一致しない。
- 点 C_n は、直線 $C_{n+1} D_{n+1}$ 上にあり、 C_{n+1} と D_{n+1} と一致しない。
- 点 D_n は、直線 $D_{n+1} A_{n+1}$ 上にあり、 D_{n+1} と A_{n+1} と一致しない。

このとき、任意の正の整数 n に対して、凸四角形 $A_n B_n C_n D_n$ が正方形であることを示せ。

ただし、凸四角形 $WXYZ$ と表すとき、頂点 W, X, Y, Z はこの順に反時計回りになっているものとする。

問2 配点：35

2 以上の整数 n であって、以下の条件をみたすものをすべて求めよ。

n の正の約数の個数を N とし、 n の正の約数を $d_1 < d_2 < \cdots < d_N$ としたとき、 $i = 1, 2, \dots, N-1$ について $d_i^{d_{i+1}}$ はいずれも平方数である。

結果のみを解答する問題

問3 配点：8

1 以上 100 以下の整数の組 (a, b, c) であって、

$$\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{101}$$

が 0 でない整数になるものはいくつあるか.

問4 配点：8

「1」が書かれたカード 100 枚が横一列に並んでいる. これらに対して、隣り合う 2 枚のカードの間に「+」「-」「×」「÷」のいずれかが書かれたカードを 1 枚ずつ計 99 枚入れることで式を作することを考える. できあがる式として考えられるものすべて (4^{99} 通りある) に対する、計算結果の値の 2 乗の (相加) 平均を求めよ.

問5 配点：10

以下の条件をともにみたす整数の組 (a, b, c) をすべて求めよ.

- a, b, c はこの順に等差数列をなす.
- x に関する 3 次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ は重解をもち、さらにこの方程式の解はすべて整数である.

問6 配点：12

a, b, c を実数とする. x に関する 4 次方程式 $x^4 + x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ の、(重複も込めた) 4 つの複素数解 $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ は相異なる虚数であり、以下の条件をみたしている.

$|\omega_1 - \omega_2|, |\omega_1 - \omega_3|, |\omega_1 - \omega_4|, |\omega_2 - \omega_3|, |\omega_2 - \omega_4|, |\omega_3 - \omega_4|$ はちょうど 2 種類の実数からなり、そのうち小さい方は 1 である.

このとき、 a としてありうる値をすべて求めよ.

問 7 配点：12

正の整数 n に対して、以下の 4 つから 1 つを選んで適用することで新たな正の整数に置き換える操作を考える．ただし、操作を繰り返す場合、直前に選んだ操作と異なる操作を選ぶこともできるが、操作後の値が正の整数にならないような操作は行うことができないものとする．

1. 正の整数 n を $3n - 1$ で置き換える．
2. 正の整数 n を $3n$ で置き換える．
3. 正の整数 n を $3n + 1$ で置き換える．
4. 正の整数 n を $\frac{n+1}{3}$ 以下の整数のうち最大のもので置き換える．

また、正の整数の組 (i, j) のスコアを以下のように定義する．

i に操作を繰り返し行って j にするための操作回数としてありうる最小の値¹．

例えば、3 を 2 にするためには、操作 4, 1 をこの順に行うと操作回数が最小になるため、 $(3, 2)$ のスコアは 2 となる．このとき、1 以上 121 以下の整数の組 (i, j) すべてについて、そのスコアを足し合わせた値を求めよ．

問 8 配点：12

はじめ、座標平面上の点 P が点 $(0, 0)$ にある．この点 P を x, y いずれかの正方向に 1 だけ移動させる操作を計 10 回繰り返して、点 $(5, 5)$ に移動させることを考える．

0 以上 5 以下の整数 k について、点 P が通過した 11 個の格子点²のうち、その x 座標と y 座標のうち大きくない方が k に等しいものの個数を n_k と定める．

このとき、 ${}_{10}C_5$ 通りの操作方法すべてについて、積 $n_0 n_1 n_2 \cdots n_5$ を足し合わせた値を求めよ．

問 9 配点：14

鋭角三角形 ABC の外接円を Γ 、垂心を H 、外心を O とする． A から辺 BC におろした垂線の足を D 、直線 BH と Γ の交点のうち B でないものを E 、三角形 AEH の外接円と直線 DE の交点のうち E でないものを F とすると、3 点 A, F, O はこの順に同一直線上に並び、加えて $BD = 2$ 、 $CD = 5$ が成立した．このとき、三角形 ABC の面積を求めよ．

¹ $i = j$ のときは 0 とする．

²格子点とは、 x 座標も y 座標も整数であるような点のことである．

問 10 配点：16

1 以上 100 以下の整数 n に対して、関数 f を

$$f(n) = \sum_{k=n}^{100} (-1)^k \cdot {}_{100}C_k \cdot ({}_kC_n)^2$$

で定める。このとき、 $f(n)$ のとりうる最大の値を求めよ。

問 11 配点：18

x についての多項式 $f(x), g(x)$ を

$$f(x) = x^2 + 2x - 3, \quad g(x) = x^{399} + x$$

で定める。このとき、1 以上 400 以下の整数 n に対して $(nf(g(n)))^{399}$ を足し合わせた値を、素数 401 で割った余りを求めよ。

問 12 配点：20

鋭角三角形 ABC の外接円を Γ 、垂心を H とし、3 頂点 A, B, C から対辺におろした垂線の足をそれぞれ D, E, F とする。また、直線 AD と直線 EF の交点を G とし、直線 AH と Γ の交点のうち A でない方を S 、三角形 EFS の外接円と Γ の交点のうち S でない方を T とし、 B, C における Γ の接線の交点を U とする。 $EF = 25$, $BU = 33$, $\angle BGC = 2\angle BAC$ が成り立つとき、線分 AT の長さを求めよ。