

PILAME 杯 2026

決勝問題（第1部）

2026年8月10日(月) 12:45～16:15

注意事項

1. コンテストで利用できるものは、筆記用具・定規・コンパス・解答用紙・計算用紙、および特段の事情により個別に認められたもののみです。分度器や電卓は使用できません。
2. 問題は全部で8問あり、すべて記述問題（計300点）です。各問題は、おおよその難易度順（問題番号が大きいほど難しい）に並んでいます。
3. 各問題の配点は以下の通りです。予選問題と決勝問題の配点を比較することは一切想定しておりませんので注意してください。

問1	問2	問3	問4	問5	問6	問7	問8
17	27	29	36	43	48	48	52

4. コンテスト中はチームの選手間でのみ会話を行うことができます。
5. 解答はすべて解答用紙に記述してください。問題用紙や計算用紙は回収しませんので、問題用紙や計算用紙に記入した解答は採点されません。

Sponsored by



ELYSIUM

問 1 配点：17

n, m を正の整数とする. 1 以上 m 以下の整数 $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ が以下の条件をみたしている.

$2n$ 個の整数 $i_1, i_2, \dots, i_n, j_1, j_2, \dots, j_n$ が

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq 2n, \quad 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_n \leq 2n, \\ (i_1, i_2, \dots, i_n) \neq (j_1, j_2, \dots, j_n)$$

をすべてみたすならば, $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}) \neq (a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_n})$ である.

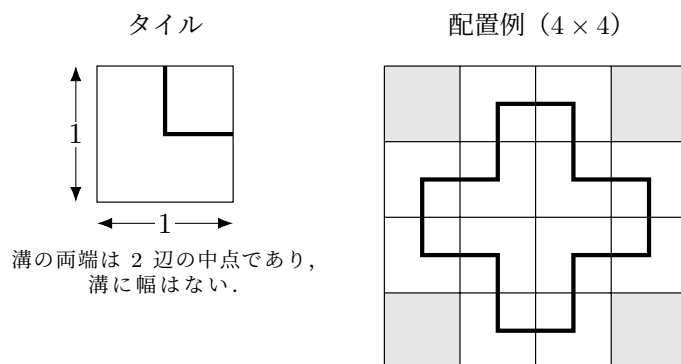
このとき, m としてありうる最小の値を n を用いて表せ.

問 2 配点：27

m, n を 2 以上の整数とする. 図のような, L字型の溝が彫られた 1 辺の長さが 1 の正方形のタイルを, $m \times n$ のマス目にそって何枚か置くことを考える. このとき, 以下の条件をともにみたす置き方が存在するような組 (m, n) をすべて求めよ.

- 置かれたすべてのタイルの溝がつながって, 1 本の閉じた曲線をなす.
- タイルの置かれていないどの 2 つのマスも, 辺を共有しない.

ただし, タイルは回転させてもよいが, マス目からはみ出したり, タイルどうしが重なったりしてはならない.



灰色のマスにはタイルが置かれていない.

問 3 配点：29

三角形 ABC の辺 BC 上（端点を除く）に相異なる 2 点 D, E を, 4 点 B, D, E, C がこの順に並ぶようにとる. 三角形 ABC の内心を I , 三角形 BAD の内心と内接円をそれぞれ I_1, ω_1 , 三角形 CAE の内心と内接円をそれぞれ I_2, ω_2 とする. ω_1, ω_2 の共通外接線¹のうち直線 BC でない方を ℓ としたところ, 三角形 II_1I_2 の外接円 Ω は ℓ に接した. このとき, Ω は三角形 ABC の外接円にも接することを示せ.

問 4 配点：36

正の整数に対して定義され正の整数値をとる関数 f であって, 任意の正の整数 m, n に対して

$$f(m + f(n))^2 - 4f(m)n$$

が平方数²になるものをすべて求めよ.

問 5 配点：43

$AB < AC$ なる鋭角三角形 ABC があり, その外接円を Γ , 外心を O , 垂心を H とする. 線分 AH の中点を M , Γ の A を含む方の弧 BC の中点を N , Γ の B における接線と C における接線との交点を T とする. 線分 AH を直径とする円と Γ との交点のうち A でない方を P とすると, Γ の P における接線と直線 HT は点 Q で交わった. また, 直線 MO と直線 NQ は点 R で交わり, 3 点 N, Q, R はこの順に並んだ. このとき, $\angle NPQ = \angle QPR$ が成り立つことを示せ.

問 6 配点：48

正の整数 n であって, 5^{2026} が $4^n + 3^n + 2^n + 1$ を割り切るもののうち, 最小のものを求めよ.

¹2 円 C_1, C_2 の共通の接線のうち, 接線に対して C_1, C_2 が同じ側にあるものを, C_1, C_2 の共通外接線という.

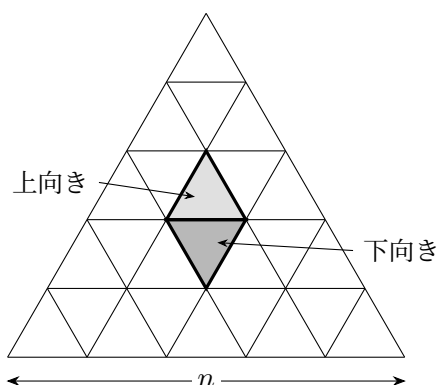
² a が平方数であるとは, 整数 b であって $a = b^2$ をみたすようなものが存在することをいう.

問 7 配点：48

n を 3 以上の整数とする．図のように，1 辺の長さが n である正三角形が，各辺に平行な線分によって，1 辺の長さが 1 である n^2 個の正三角形に分割されている．これらの 1 辺の長さが 1 の正三角形をマスとよぶ．はじめ，いくつかのマスを選んでスライムを置く．その後，スライムは以下の規則にしたがって広がる．

- 各マスについて，辺を共有するマスのうち，スライムのいるものが 2 個以上あるならば，そのマスにもスライムが広がる．
- 上向きのマスにスライムがいるならば，その底辺を共有する下向きのマスにもスライムが広がる．ここで，底辺とは三角形の辺のうち横向きのものである．

一度スライムが広がったマスからスライムが消えることはない．十分な時間が経った後，すべてのマスにスライムがいるようにするために，はじめにスライムを置くマスの個数としてありうる最小の値を求めよ．



問 8 配点：52

有理数に対して定義され有理数値をとる関数 f であって，任意の有理数 x, y に対して

$$f(f(x))f(f(y)) + f(x+y) = f(x)f(y)$$

をみたすものをすべて求めよ．