



# PILAME 杯 2026

## 決勝問題（第2部）

2026年8月11日(火・祝) 9:45～11:45

### 注意事項

1. コンテストで使用できるものは、筆記用具・定規・コンパス・解答用紙・計算用紙、および特段の事情により個別に認められたもののみです。分度器や電卓は使用できません。
2. 問題は全部で10問あり、問1～2は記述問題（計80点）、問3～10は結果のみを解答する問題（計120点）です。問1～2、問3～10はそれぞれおおよその難易度順（問題番号が大きいほど難しい）に並んでいます。問2までと問3以降の難易度を比較することは一切想定しておりませんので注意してください。
3. 各問題の配点は以下の通りです。予選問題と決勝問題の配点を比較することは一切想定しておりませんので注意してください。

| 問1 | 問2 | 問3 | 問4 | 問5 | 問6 | 問7 | 問8 | 問9 | 問10 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| 32 | 48 | 7  | 8  | 12 | 15 | 18 | 18 | 21 | 21  |

4. コンテスト中はチームの選手間でのみ会話を行うことができます。
5. 解答はすべて解答用紙に記述してください。問題用紙や計算用紙は回収しませんので、問題用紙や計算用紙に記入した解答は採点されません。

*Sponsored by*



(このページは草稿に使用して構いません.)

## 記述問題

### 問1 配点：32

任意の正の整数  $a, N$  に対して，ある正の整数  $n$  が存在して

$$d(n + d(n^2 + a)) > N$$

となることを示せ．

ただし，正の整数  $m$  に対して， $d(m)$  で  $m$  の正の約数の個数を表す．

### 問2 配点：48

$k$  を実数とする．正の実数  $a_1, a_2, \dots, a_{2026}$  であって，任意の 1 以上 2024 以下の整数  $i$  に対して  $a_i + a_{i+2} \leq ka_{i+1}$  をみたすものが存在するとき， $k$  としてありうる値の範囲を求めよ．

## 結果のみを解答する問題

### 問3 配点：7

$n$  を正の整数とする． $S = \{1, 2, \dots, n\}$  とし， $S$  上で定義され  $S$  に値をとる関数  $f$  のスコアを以下のように定める．

1 以上  $n$  以下の整数  $i$  それぞれに対して，座標平面上で 2 点  $(i, 0)$ ,  $(f(i), 1)$  を結ぶ線分を引く．これら  $n$  本の線分から相異なる 2 本を選ぶ方法のうち，2 線分が端点以外で交わるような選び方を  $a$  通り，端点を共有するような選び方を  $b$  通りとしたとき， $2a + b$  をスコアとする．

このとき， $f$  としてありうるものすべてに対して，そのスコアを足し合わせた値を求めよ．

### 問4 配点：8

正の整数の組  $(a, b)$  であって，

$$\gcd(a^4 + 1, b^4 + 1) = (b - 3a)(b - 4a)$$

をみたすものをすべて求めよ．

ただし，正の整数  $x, y$  に対して，それらの最大公約数を  $\gcd(x, y)$  で表す．

### 問5 配点：12

$xy$  平面において， $x$  座標と  $y$  座標がともに 0 以上 1013 以下の整数であるような  $1014^2$  個の点を良い点とよぶ．距離がちょうど 1 離れた良い点どうしは橋でつながれており，それ以外の良い点どうしは橋でつながれていない． $(0, 0)$  から  $(1013, 1013)$  まで橋をたどって移動する経路が最短経路であるとは，その長さがちょうど 2026 であることをいう．いま，最短経路  $P$  に対してそのスコアを，以下の条件をみたすために壊すべき橋の最小本数と定める．

壊れていない橋のみからなる最短経路が  $P$  のみとなる．

このとき， $2026C_{1013}$  個の最短経路すべてに対して，そのスコアを足し合わせた値を求めよ．

**問 6 配点：15**

$AB < AC$  なる鋭角三角形  $ABC$  について、線分  $AP$  が三角形  $ABC$  の外接円の直径をなすような点  $P$  をとり、線分  $BC$ ,  $BA$  上にそれぞれ点  $D$ ,  $E$  を、 $D$  が線分  $PE$  の中点となるようにとる。さらに、三角形  $CDE$  の外接円と三角形  $ABC$  の外接円の交点のうち  $C$  でない方を  $F$  とし、三角形  $AFE$  の外接円と線分  $AC$  の交点のうち  $A$  でない方を  $G$  とすると、直線  $AB$  と直線  $FG$  は直交し、 $FP = 16$ ,  $GE = 7$  が成立した。このとき、線分  $BC$  の長さを求めよ。

**問 7 配点：18**

集合  $\{1, 2, \dots, 10000\}$  の部分集合  $S$  が以下の条件をみたしている。

$S$  は 4 個以上の要素をもち、かつ  $a < b < c < d$  なる  $S$  の要素  $a, b, c, d$  をどのようにとってきても、 $b - a, c - b, d - c$  を 3 辺の長さとする三角形は存在しない。ただし、同一直線上にある 3 点は三角形をなさないものとする。

このとき、集合  $S$  の要素数としてありうる最大の値を求めよ。

**問 8 配点：18**

$AB < AC$  なる鋭角三角形  $ABC$  について、辺  $BC$  の中点を  $M$  とする。三角形  $ABC$  の外接円の  $C$  を含まない方の弧  $AB$  上に、 $A, B$  のいずれでもない点  $P$  をとったところ、直線  $AM$  と直線  $BP, CP$  がそれぞれ点  $X, Y$  で交わった。さらに、三角形  $BPY$  の外接円と三角形  $CPX$  の外接円との交点のうち、 $P$  でない方を  $Q$  とすると、

$$AB = 9, \quad AC = 10, \quad PQ = 6, \quad XY = 14$$

が成立した。このとき、線分  $BC$  の長さを求めよ。

問 9 配点：21

$2026 \times 2026$  のマス目があり、上から  $i$  行目、左から  $j$  列目にあるマスを  $(i, j)$  とよぶ。はじめ、いくつかのマスに駒が 1 個ずつ置かれており、これらの駒に対して以下の操作を繰り返す。

駒を 1 つ選び<sup>1</sup>、その駒が置かれているマスを  $(x, y)$  とする。 $\{|x' - x|, |y' - y|\} = \{1253, 773\}$  をみたすマス  $(x', y')$  のうち 1 つを選び、選んだ駒をそのマスへ動かす。

操作をどのように繰り返しても、どのマスにも駒が 2 個以上置かれることがないようなはじめの駒の配置を考える。このような配置における駒の個数としてありうる最大の値を求めよ。

問 10 配点：21

$p = 23$  とし、 $S = \{0, 1, \dots, p-1\}$  とする。整数に対して定義され  $S$  に値をとる関数  $f$  であって、以下の条件をともにみたすものはいくつあるか。

- 任意の整数  $x$  に対して、 $f(x+p) = f(x)$  が成り立つ。
- 任意の整数  $x, y$  に対して、 $f(xf(y)) = f(yf(x))$  が成り立つ。

---

<sup>1</sup>操作ごとに異なる駒を選んでよいことに注意せよ。